EXAMEN DU 14 JANVIER 2020

Les notes de cours, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Questions de cours (4 points)

1. Énoncer le théorème de Herglotz (sans démonstration).
2. On applique un filtre $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ à un processus stationnaire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Rappeler l'effet de cette opération sur la fonction d'auto-covariance, puis sur la mesure spectrale. Démontrer les formules proposées.

Exercice (6 points)

Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de moyenne 0 et de variance 1. On considère l'équation

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad X_t \;=\; Z_t + 2Z_{t-1} - \frac{5}{3}X_{t-1} + \frac{2}{3}X_{t-2}.$$

1. Comment s'appelle cette équation ?
2. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
3. Expliciter le processus X. Est-il causal ?
4. Calculer la moyenne et l'auto-covariance de X.
5. Calculer la densité spectrale de X.
6. Calculer le prédicteur progressif d'ordre p de X_t et l'erreur de prédiction σ_p associée, pour tout $p \geq 1$.

Problème (10 points)

Dans tout le problème, on se donne un processus <u>gaussien</u> $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, et on pose

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad Y_t \ := \ e^{X_t}.$$

Partie A

A1. Montrer que le processus $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est du second ordre, et que pour $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &= e^{\mu_X(t)+\frac{\gamma_X(t,t)}{2}}; \\ \gamma_Y(t,t+h) &= \mu_Y(t)\mu_Y(t+h)\left(e^{\gamma_X(t,t+h)}-1\right). \end{aligned}$$

A2. Montrer que Y est stationnaire si et seulement si X est stationnaire.

A3. Montrer que Y est un bruit blanc faible si et seulement si les $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont i.i.d..

Partie B

Dans cette partie, on suppose que le processus gaussien X est stationnaire et centré.

B1. Exprimer μ_Y et $\gamma_Y(h)$ en fonction de $\gamma_X(0)$ et $\gamma_X(h)$.

B2. Montrer que si $\gamma_X(0) > 0$ et $\gamma_X(h) \to 0$ lorsque $h \to \infty$, alors

$$\mathrm{Var}\left(\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_p Y_p\right) \ > \ 0,$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

B3. Montrer que si $(\gamma_X(h))_{h\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors Y admet une densité spectrale.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est solution de l'équation AR(1)

$$X_t \ = \ Z_t + \frac{1}{2}X_{t-1},$$

où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus dont les coordonnées sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

C1. Montrer qu'il existe une unique solution stationnaire X, que l'on explicitera.

C2. Justifier que X est un processus gaussien centré, et préciser son auto-covariance.

C3. En déduire l'existence d'un processus stationnaire $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs strictement positives, et d'un bruit blanc faible $B = (B_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \qquad Y_t \ = \ B_t\sqrt{Y_{t-1}}.$$

C4. Le processus Y admet-il une densité spectrale ?